Cap. CONSECINȚA LOGICĂ ŞI SEMNIFICAȚIA AXIOMEI LUI S4

CornelPopa

1. Introducere

S4 este un sistem normal de logică modală mai slab decât S5 şi mai tare decât T. Axioma specifică lui S4 este formula: Lp ⊃LLp care tradusă în limba română spune că dacă p este un enunț logic necesar sau o lege logică, atunci este necesar ca p să fie logic necesar.

Acest ultim enunț parcă îmi zgârie auzul şi îmi supără bunul simț. Nu îmi cade bine, sub raport estetic, idea că ceva necesar trebuie să fie necesar. Sunt gata să resping enunțul pe motive de ordin gramatical sau stilistic. Prea sună a pleonasm şi a vorbire neglijentă.

Va trebui insă să-mi înfrânez reacția de respingere până ce voi face un test de ordin formal la nivel metateoretic. Şi în funcție de rezultatele testului să admit cu un sens rațional propoziția axiomei specifice lui S4 şi să o pun la loc de cinste pe care îl merită sau dacă testul nu o justifică să o resping pentru că-mi zgârie auzul.

Starea de îndoială şi neîncredere a stat ascunsă în cugetul meu multă vreme, până în urmă cu câteva săptămâni, când am găsit între hârtiile mele circa 50-60 de pagini de conspecte făcute în urmă cu 30 de ani după cărțile lui Clarence Irving Lewis, celebrul autor al lui *A Survey of Symbolic Logic, 1918* şi a lui *Symbolic Logic* scrisă în 1932 în colaborare cu C.H. Langford. Ştiu precis că le-am citit cu hărnicie pe ambele, pe când nu ştiam prea multă logică. Recent am găsit conspectele doar după ultima dintre cele două cărți şi le-am dat d-lui lector Gabriel Iliescu care scrie o teză de doctorat despre consecința logică. Scrierile lui C.I.Lewis sunt bogate în învățăminte despre idea de consecință logică.

Scriem aceste rânduri cu intenția de a releva printr-un exemplu banal idea profundă ascunsă în axioma lui S4.

Pentru a înțelege axioma lui S4 şi a lui S5 trebuie să reconstituim contextul creierii logicilor modale moderne de către C. I. Lewis. Logicile modale moderne au fost create de autorul american din dorința de a distinge între idea de implicație materială p⊃q, definită de B. Russell, dacă p, atunci q şi implicația logică redată de Lewis prin litera elenă gama aşezată orizontal care viza idea de derivare logică "din p se deduce q".

Formula p⊃q este un conectiv logic binar, ca şi conjuncția p∧q sau disjuncția p∨q, în timp ce formula p⇒q (folosim ⇒ in loc de gama culcat de care nu dispunem pe calculator) nu este un conectiv logic, ci o relație de consecință logică. Relația de consecință logică p⇒q spune că din adevărul lui p se deduce, pe cale logică, prin scheme de inferență, adevărul lui q. Aceasta dacă optăm pentru interpretarea implicației stricte ca o relație de consecință logică sintactică. Dar putem să o interpretăm şi ca o relație de consecință logică semantică, după care orice model al premiselor este şi un model al concluziei sau al consecințelor derivabile din acel set d premise.

Din alt punct de vedere, relația de consecință logică poate fi directă sau imediată, ⇒ când din două sau mai multe formule date desemnate prin P, derivă direct, prin aplicarea *unei* scheme de inferență şi *o singură dată,* consecința C, P⇒ C. Aceasta înseamnă că există o schemă de inferență validă, modus ponens, tranzitivitatea, etc., care aplicată asupra premiselor P conchide asupra lui C. Dar, de cele mai multe ori, consecința logică căutată se obține ca urmare a aplicării mai multor scheme de inferență, unele dintre ele folosite de mai multe ori. Avem adesea de a face cu ceea ce logicienii numesc *închiderea relației de consecință logică* în raport cu un set de premise sau ipoteze inițiale date. Convenim să notăm aplicarea iterată a relației de consecință logică pentru a obține o consecință mai îndepărtată prin $\Rightarrow^*$ sau prin semnul consecinței logice sintactice $\vdash$. In acest caz vom scrie $P\Rightarrow^*C$.

2. Consecința logică în limba naturală și în limbajele logice

Ilustrăm idea de consecință logică sintactică prin două exemple. Ambele pot fi formalizate, deopotrivă, în logica propozițiilor și în logica predicatelor. Pe primul îl formalizăm în logica propozițiilor, iar pe al doilea în logica predicatelor.

Exemplul 1

P1. Petru se întâlnește cu Dan sau cu Ana.
P2. Dacă Petru se întâlnește cu Dam se duc la club și joacă șah.
P3. Dacă Petru se întâlnește cu Ana, se duc la discotecă și dansează.
P4. Dar Petru și Dan nu joacă șah.
C. Prin urmare, Petru dansează cu Ana.

Formalizare

$P1^{\#}$. $p \vee q$
$P2^{\#}$. $p \supset (r\wedge s)$
$P3^{\#}$. $q \supset (t\wedge v)$
$P4^{\#}$. $-s$
………
$C^{\#}$. v

Convențiile de formalizare sunt : p = Petru se întâlnește cu Dan; q = Petru se întâlnește cu Ana; r = se duc la club; s= joacă șah; t= se duc la discotecă; v= dansează.
Obs1. Predicatele de două argumente instanțiate descriu propoziții și pot fi formalizate prin variabile propoziționale.
Obs 2. Verificăm, prin calcul natural, dacă din premise rezultă concluzia. Practic, aplicăm niște reguli de inferență asupra premiselor pentru a obține concluzia.
Obs 3. Regulile de inferență aplicate au fost: Dacă un termen al unei conjuncții e fals, conjuncția e falsă, *Modus tollens* , principiul alternativei sau "regula silogismului ipotetic disjunctiv, Modus ponens și regula excluderii conjuncției.

Teorema Ex1. *$[(p \vee q) \wedge(p \supset (r\wedge s)) \wedge (q \supset (t\wedge v)) \wedge -s] \supset v$*

$P1^{\#}$.	$p \vee q$	ip.
$P2^{\#}$.	$p \supset (r\wedge s)$	ip.
$P3^{\#}$.	$q \supset (t\wedge v)$	ip.
$P4^{\#}$.	$-s$	ip
5.	$-(r\wedge s)$	(LP, $P4^{\#}$, $P2^{\#}$, $-s \supset -(r\wedge s)$)
6.	$-p$	(Modus, Tollens, $P2^{\#}$, 5)
7.	q	(Principiul alternativei $\vee$, $P1^{\#}$, 6)
8.	$t\wedge v$	(Modus Ponens, $P3^{\#}$, 7)
9.	v	($E\wedge$, 8, $v = C^{\#}$)

10. $p \vee q, p \supset (r\wedge s), q \supset (t\wedge v), -s\} \vdash v$ ($P1^{\#}$ - $P4^{\#}$, 9).
11. $[(p \vee q) \wedge(p \supset (r\wedge s)) \wedge (q \supset (t\wedge v)) \wedge -s] \supset v$ = Tautologie (*DTC*, 11)
12. $L\{ [(p \vee q) \wedge(p \supset (r\wedge s)) \wedge (q \supset (t\wedge v)) \wedge -s] \supset v\}$ (Nec, 11)

Obs 4. Prin 5 pași (vezi 5-9) a fost obținută din premisele $P1^{\#}$ - $P4^{\#}$ concluzia $C^{\#}$, respectiv v. Am scris, în consecință, formula 10 după care din premisele $P^{\#} = P1^{\#} - P4^{\#}$ derivă logic (se deduce) concluzia $C^{\#}$.

Pe scurt, $P^{\#} \Rightarrow^* C$, respectiv premisele $P^{\#}$ (cu $P^{\#} = P1^{\#} - P4^{\#}$) implică logic concluzia $C^{\#}$.

Obs5. De reținut că formulei 10 i se poate aplica teorema deducției după care dacă din Γ, A $\vdash$ B, atunci $\Gamma \vdash$ A $\supset$ B, prin care ipotezele sau premisele se transformă, pe rând, în antecedenți ai consecinței $B^{\#}$. Simbolul $\vdash$, ca şi $\Rightarrow^*$, se citeşte: "se deduce".
Pe această cale se ajunge prin aplicarea de 4 ori a metateoremei teoremei deducției la formula:

13. $\phi \vdash ((p \vee q) \supset ((p \supset (r \wedge s)) \supset ((q \supset (t \wedge v)) \supset (-s \supset v))))$

Ceea ce derivă din mulțimea vidă de ipoteze este adevărat necondiționat şi deci, lege logică, iar legile logice sunt adevăruri logic necesare. Pe acest temei se aplică în sistemele modale normale regula necesitării $\vdash\alpha \Rightarrow \vdash L\alpha$.
Obs6. Formulele 10 - 12 spun că dacă dintr-un set de premise $P^{\#}$ am derivat prin scheme de inferențe concluzia $C^{\#}$, atunci $P^{\#} \supset C^{\#}$ este o lege logică . Aceasta este atestată, între altele, de metateorema:

Metateorema DTC. Formulele:

I $A_1, ..., A_n \vDash B$

II $A_1 \wedge ... \wedge A_n \supset B$ = T , unde prin T am notat tautologia.

III $A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge -B$ = □, unde prin □ am notat contradicția.

sunt *echivalente*. (Ase vedea demonstrația acestei metateoreme in cartea noastră Logică şi metalogică vol 1, Editura fundației "România de mâine" Bucureşti 2000,,pag 69-70.)

Pentru interesul nostru local, demonstrăm doar că din adevărul lui I decurge adevărul lui II. Construim pentru aceasta o demonstrație prin reducere la absurd.

1) $A_1,...A_n \vDash$ B ip.

2) II $A_1 \wedge ... \wedge A_n \supset B \neq$ T ip. dem. Ind.

Propoziția demonstrației indirecte 2) afirmă că există o atribuire de valori v (sau un model) în care:

3) $(A_1 \wedge ... \wedge A_n)^v = 1$

4) $B^v = 0$.

Numim consecință logică a unei formule logice binare f_I orice formulă f_k ce ia valoarea 1 în orice interpretare v în care antecedentul f_I a luat valoarea 1.

5) În orice interpretare *v*,

dacă $A^v{}_1 = A^v{}_2 =...= A^v{}_n = 1$, atunci $B^v = 1$.

Pe de altă parte din 3) şi definiția conjuncției rezultă:

6) $A^v{}_1 = A^v{}_2 = ...=A^v{}_n = 1$.

Iar din 5) şi din 6) rezultă, prin modus ponens:

7) $B^v = 1$

ceea ce contrazice 4).

Prin aceasta s–a încheiat demonstrația indirectă a faptului că I implică II.

Concluzia de interes pentru obiectivele articolului de față este faptul că *orice derivare corectă a unei concluzii dintr-un set de premise identifică o instanțiere a unei legi logice de forma premisele $P^{\#}$ implică logic concluzia $C^{\#}$,* respectiv:

Pas 1 $P^{\#} \vdash C^{\#}$ (sau $P^{\#} \Rightarrow^* C^{\#}$ Premisele implică logic Concluzia)

Din punct de vedere semantic se poate spune că, dacă formula consecința $C^{\#}$ a fost degajată conform unor scheme de inferență valide, atunci orice model al premiselor $P^{\#}$ va fi şi un model al consecinței $C^{\#}$, iar implicația lor $P^{\#} \supset C^{\#}$ este o tautologie sau funcție identic adevărată:

Pas 2 $P^{\#} \supset C^{\#}$ = T (tautologie)

Cum tautologiile sunt legi logice sau tautologii putem trece prin *regula necesitării* introdusă de K. Gödel în anii 1930:

$\vdash\alpha \Rightarrow \vdash L\alpha$ Paşaport la rescrierea tautologiilor sau legilor logice ca formule normale de logică modală aletică.

Pas 3 L ($P^{\#} \supset C^{\#}$)

Între logica matematică clasică şi imperiul logicilor modale nu există nici o prăpastie. Trecerea se face lin şi firesc şi conform intuiţiilor noastre logice fireşti. Trecerea de la logica clasică la logicile modale are loc între Pas-ul 2 şi Pas-ul . Legitimaţia de intrare sau paşaportul îl reprezintă regula necesitării. Formula de la Pas-ul 3 este o formulă logic modală incipientă căreia i se mai poate citi pe chip originea logic propoziţională sau logic predicativă. Funcţionarul de la graniţă îi identifică uşor ţara de baştină.

Obs7. Trecerea de la 7 la 8 în textul demonstrativ al exemplului 1 se întemeiază pe aplicarea regulii necesitării care permite scrierea unei tautologii ca o teoremă logic- modală.

Până acum am arătat că orice demonstraţie corectă foloseşte scheme de inferenţă pentru prelucrarea premiselor sau datelor iniţiale şi se încheie cu descoperirea sau instanţierea unei legi logice care leagă logic necesar premisele de concluzie. Orice demonstraţie logică şi orice procedeu de decizie care identifică în logica propoziţiilor sau în logica predicatelor de ordinul întâi o teoremă sau o formulă validă descoperă raporturi logic necesare. Fiind dat un set de formule H ce descriu datele unei probleme sau un set de ipoteze, dacă din acestea construim pentru o formulă oarecare B un text demonstrativ, atunci $H \supset B$ este o lege logică sau o formulă logic necesară şi putem scrie făcând uz de regula necesitării L ($H \supset B$).

Am arătat, până acum , cum ajungem la antecedentul formulei specifice lui S4, la Lp. Mai trebuie să arătăm cum ajungem, tot la nivel metateoretic, la LLp.

Dar, până atunci, să mai coborâm puţin la sol, la nivelul logicii vii din limbile naturale, să mai luăm un exemplu de raţionament şi să-l formalizăm în limbajul logicii predicatelor.

Într-un seminar cu studenţii de la Automatică, prin anii 1993-4, când deasupra tablei, în faţa studenţilor era fixat portretul "celui mai iubit" dintre concetăţeni, le-am propus să decidă asupra raţionamentului:

Exemplul 2

P1.Cei ce se tem de cineva , nu sunt iubiţi de toţi .
P2. Cei ce sunt păziţi , se tem de cineva .
P3. Şefii Mafiei sunt păziţi .
P4. Există mafii.

C. Prin urmare , şefii Mafiei nu sunt iubiţi de toţi .

Pe post de antecedent (P) sau set de premise stau propoziţiile P1.- P4, iar pe post de consecinţă logică stă propoziţia C. Va trebui să arătăm că $P \Rightarrow^* C$. i.e. concluzia C derivă logic din premisele P = P1–P4. Pentru aceasta formalizăm, mai întâi, premisele şi concluzia în limbajul logicii predicatelor de ordinul întâi.

Conventii de codificare :
P(x) = "x este păzit de y"
T(x,y) = "x se teme de y "
I(x,y) = "x iubeşte pe y"
S(x,y) ="x este şef al lui y"
Mafia = a

Formalizare raţionamentului

1. $\forall x(\exists y T(x,y) \supset \exists z\text{-}I(z,x))$
2. $\forall u(P(u) \supset \exists t T(u,t))$
3. $\forall v(S(v,a) \supset P(v))$
4. $\exists w M(w)$

---

5. $\forall s(S(s,a) \rightarrow \exists r\text{-}I(r,s))$

Optăm pentru verificarea validităţii raţionamentului prin metoda derivării rezolutive. Pentru aceasta va trebui să aducem formulele obţinute la forma lor clauzală. Principiul rezoluţiei este o schemă generală de inferenţă care îşi subsumează ca pe nişte cazuri particulare, *modus ponens, modus tollens*, principiul alternativei, principiul incompatibilităţii, principiul tranzitivităţii. Cititorul poate găsi în cursurile noastre principiul rezoluţiei, teorema rezolventului, teorema derivării rezolutive, metoda rezoluţiei şi diferite strategii rezolutive pentru prelucrarea automată a bazelor de cunoştinţe.

Dăm mai jos etapele aducerii la forme clauzale a formulelor obţinut din premise şi din concluzie.

Aducem formulele 1-4 la forma normală prenexă :

Formulele 3 şi 4 sunt deja la forme normale prenexe. Transformăm, deci premisele 1,2 şi concluzia 5.

1. a) $\forall x(-\exists y T(x, y) \vee \exists z\text{-}I(z, x))$
   b) $\forall x\,(\forall y\text{-}T(x, y) \vee \exists z\text{-}I(z, x))$ (-∃ a) (E⊃,1)
   c) $\forall x \forall y(-T(x, y) \vee \exists z\text{-}I(z, x))$ (EFD b)
   d) $\forall x \forall y \exists z(-T(x, y) \vee \exists z\text{-}I(z\ x))$ (EFD c)
2. a) $\forall u(-P(u) \vee \exists t T(u, t))$ (E⊃,2)
   b) $\forall u \exists t(-P(u) \vee T(u, t))$ (EFD a)

Forma normală prenexă este :

1. $\forall x \forall y \exists z(-T(x, y) \vee -I(x, z))$
2. $\forall u \exists t(-P(u) \vee T(u, t))$
3. $\forall v(S(v, a) \supset P(v))$
4. $\exists w M(w)$

Pasul următor consta in eliminarea cuantificatorilor existenţiali din prefix prin aplicarea regulilor de skolemizare . Prin urmare, forma normala Skolem va fi :

1. $\forall x \forall y(-T(x, y) \vee -I(f(x, y), x)$
2. $\forall u(-P(u) \vee T(u, g(u))$
3. $\forall v(-S(v, a) \vee P(v))$ (E⊃3)
4. $M(a)$

Eliminăm acum cuantificatorii universali şi obţinem forma clauzală Davis - Putnam

Clauzele obţinute din premise sunt :

1. $-T(x, y) \vee -I(f(x, y), x)$
2. $-P(u) \vee T(u, g(u))$
3. $-S(v, a) \vee P(v)$
4. $M(a)$

Aplicăm acum metoda rezoluţiei la clauzele 1-4. Aceasta înseamnă derivarea din premise sau din datele problemei a concluziei sau soluţiei căutate. Dacă transpunem formula ce descrie concluzia din nou în limba naturală, ţinând cont de codul utilizat la formalizare, obţinem exact concluzia în limba naturală.

3. $-S(v,a) \vee P(v)$ 2. $-P(u) \vee T(u, g(u))$ u/v

5. $-S(v,a) \vee T(v, g(v))$ 1. $-T(x, y) \vee -I(f(x, y), x)$ (x/v y/g(v))

6. $-S(v,a) \vee -I(g(v),v)$

Fig. 1. Derivare rezolutivă progresivă

Obs1. Am efectuat o derivare rezolutivă progresivă, de la premise la concluzie, constând din doi paşi: din clauzele 3 şi 2 am derivat clauza 5 şi apoi din 5 şi 1 am derivat clauza 6. În termenii teoriei consecinţei putem scrie:

d1. $(-S(v,a) \vee P(v)) \wedge (-P(u) \vee T(u, g(u))) \Rightarrow -S(v,a) \vee T(v, g(v))$

d2. . $(-S(v,a) \vee P(v)) \wedge (-P(u) \vee T(u, g(u))) \Rightarrow -S(v,a) \vee -I(g(v),v)$

Formulele d1 şi d2 descriu acte elementare de inferenţă rezolutivă.

Întregul proces rezolutiv este redat sintetic în arborele de derivare liniară progresivă din fig, 1. Acesta poate fi transpus în termenii teoriei implicaţiei stricte astfel:

d3. $(-S(v,a) \vee P(v) \wedge (-P(u) \vee T(u, g(u))) \wedge -T(x,y) \vee -I(f(x,y),x)) \Rightarrow^* -S(v,a) \vee -I(g(v),v)$

Formula d3 poate fi redată similar cu teorema asociată exemplului 1 prin formula:

$P^{\#\#} \Rightarrow^* C^{\#\#}$, unde $P^{\#\#} = \{P1, P2, P3\}$

Obs 2. *Derivarea logică sub orice formă*, clasică sau prin metoda rezoluţiei, cum am făcut noi mai sus, *conservă veridicitatea*, dacă pornim de la premise realizabile *şi conservă validitatea,* dacă pornim de la premise valide. În exemplul dat noi am pornit de la premise admise ca adevărate. Prin urmare, dacă premisele P1-P4 sunt adevărate, atunci şi concluzia C. după care şefii mafiei *a* nu sunt iubiţi de toţi va fi adevărată. Mai mult, pentru orice raţionament valid, atestat prin calcul natural sau altă metodă de decizie, dacă conectăm prin conjuncţie premisele acestuia şi scriem implicaţia dintre conjuncţia premiselor P şi concluzia C, obţinem o lege logică de forma: $P \Rightarrow^* C$ care este echivalentă cu $L(P \supset C)$. Aşadar, are loc echivalenţa:

$P \Rightarrow^* C \equiv L(P \supset C)$. ($\delta$) Definiţia lui C.I. Lewis

Formula (δ) descrie definiţia implicaţiei stricte sau implicaţiei logice în termenii implicaţiei materiale şi a necesităţii logice. Ea ne spune că implicaţia strictă sau relaţia de consecinţă logică este o implicaţie materială logic necesară.

Echivalenţa (δ) descrie o aserţiune metateoretică: Dacă dintr-un set de premise P se deduce consecinţa C, atunci şi numai atunci, este logic necesară implicaţia dintre P şi C care se mai citeşte "Dacă P, atunci în mod necesar C ". Putem, de asemenea, descrie definiţia lui C.I. Lewis ca::

$P \Rightarrow^* C \equiv -M(P \wedge -C)$. ($\gamma$)

Echivalenţa (γ) afirmă că dacă premisele P implică logic formula consecinţă C, atunci şi numai atunci, este logic imposibil să fie P adevărat şi C fals. Pe scurt, orice raţionament corect sau valid este reductibil la o lege logică şi aceasta la rândul ei poate fi redată ca formulă modal aletică. Altfel spus formula logică ce descrie relaţia dintre premise şi o consecinţă este o lege logică. Raţionamentele corecte, indiferent de limba în care sunt redate, sunt instanţieri ale unor legi logice. La rândul lor, legile logice pot fi prefixate de operatorul modal L, în virtutea regulii necesitării introduse de K. Gödel în anii 1930.

Sub raport semantic o interpretare care satisface propoziţia P rezultată din conjuncţia premiselor, va satisface şi propoziţia C ce descrie o consecinţă sau o concluzie. Din definiţiile (δ) şi (γ) rezultă că necesitatea logică, ca şi posibilitatea logică, trebuie înţelease ca relaţii binare între seturi de premise sau ipoteze şi seturi de consecinţe degajate din acestea şi nu ca proprietăţi ale unor operatori monadici.

Dacă p este o variabilă propoziţională, Lp nu poate fi adevărat, căci ar trebui ca Lp să fie adevărat şi pentru p = 1 şi pentru p = 0. La limită, putem admite şi formule monadice de genul Lp, Mq, admiţând tacit că variabilele propoziţionale iau valori în mulţimea legilor logice. În acest caz p din Lp poate fi substituit prin $q \vee -q$ şi să obţinem formula rezonabilă $L(q \vee -q)$ care se citeşte: "Formula $q \vee -q$ este logic necesară" (Terţul exclus este o lege logică).

Altfel spus, orice tautologie din logica propoziţiilor descrie o necesitate logică întemeiată pe teoria consecinţelor logice.

Obs 3. Derivarea logică descrisă de implicaţia strictă a lui C.I. Lewis este necesitatea logică a raportului dintre premise şi concluzie într-un raţionament valid, necesitate de care vorbea şi Aristotel în scrierile sale. Fiind date premisele, scria Stagiritul, altceva rezultă cu necesitate prin chiar aceasta. Concluzia există latent în premisele asertate, dar noi, spre deosebire de divinitate, nu accedem la ea deodată, prin străluminare şi chiar dacă uneori avem intuiţia ei, nu-i putem face pe interlocutorii noştri să o accepte fără paşi discursivi, argumente sau calcule concludente.

Obs 4. Concluzia C din exemplul 2 nu s-a obţinut direct la nivelul limbii naturale. Calea a fost puţin mai întortocheată. Am "tradus" mai întâi enunţurile din premise în limbajul logicii predicatelor, le-am "formalizat". Am adus apoi formulele la anumite forme sau structuri standard, forme normale prenexe, de aici la forme normale Skolem şi de aici la forme clauzale. Am aplicat apoi asupra clauzelor o metodă performantă de inferență, metoda rezoluției și în particular am folosit o rezoluție progresivă liniară și din doi pași am obținut ca o consecință logică forma clauzală a concluziei. Pe aceasta o readucem la forma implicativă $S(v,a) \supset -I(c,v)$ și folosind în sens invers convențiile de codificare aflăm concluzia după care șefii mafiei nu sunt iubiți de toți.

Demersul nostru a fost relativ complex. Ne-am urcat, dintr-o limbă naturală la un limbaj logic formal, am făcut prelucrări și calcule iar rezultatul l-am reinterpretat în termenii limbii naturale de la care am plecat. Traiectoria noastră a fost, așadar: 1.trecerea de la o limbă naturală la un limbaj logic formal, i.e formalizare; 2. calcule într-un limbaj formal; 3. decodificarea sau reinterpretarea simbolurilor predicative în termenii limbii naturale; 4. compararea propoziției obținute din recodificare cu concluzia raționamentului cercetat; 5 luarea deciziei după criteriul : raționamentul inițial este valid, dacă formula ce-l descrie este validă.

Obs.5. Am omis în descrierea actelor inferențiale actele de inferență efectuate în procesul normalizării. Am făcut în acele transformări eliminări ale cuantificatorilor existențiali care sunt tot operații de derivare logică. La fel am omis, aplicarea regulilor de substituție a variabilelor individuale, algoritmii de unificare, etc.

Obs6. O cale alternativă mai simplă pentru decizia raționamentului cercetat se întemeiază pe observația că toate clauzele au numai atomi predicativi monadici. Altfel spus conțin doar predicate cu câte o singură variabilă liberă, chiar dacă au structuri de formule cu două argumente. In acest caz putem să asociem fiecărui predicat monadic mulțimea caracteristică de obiecte din domeniul de interpretare care îl satisface:

Predicatului monadic S(v,a) îi vom asocia mulțimea $S^{\#} = \{v \in M|\ S(v,a)\}$, respectiv mulțimea șefilor de mafii. Predicatului P(v) îi vom asocia mulțimea $P^{\#} = \{v \in M|\ P(v)\}$, respectiv mulțimea celor ce sunt păziți. Predicatului monadic T(u,b) îi vom asocia mulțimea $T^{\#} = \{u \in M|\ T(u,b)\}$, mulțimea celor care se tem de cineva. Predicatului -I(c,x) îi vom asocia mulțimea $-I^{\#}(c,x) = \{x \in M|-I(c,x)$, respectiv mulțimea celor care nu sunt iubiți de toți.

Este ușor de văzut că între aceste patru mulțimi are loc relația de incluziune după cum urmează :

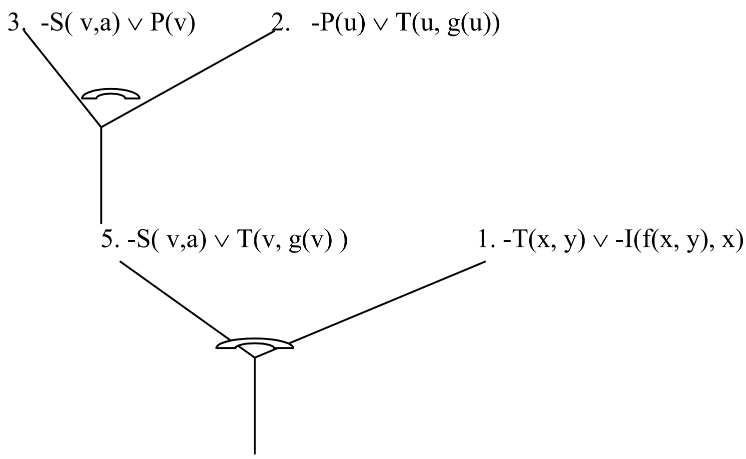
$$S^{\#} \subset P^{\#} \subset T^{\#} \subset -I^{\#}(c,x). \qquad (\varphi)$$

Cum incluziunea este tranzitivă, rezultă că nici un șef de mafie nu e iubit de toți.

Formula (φ) poate fi redată și prin diagrame Euler. Pe această cale se poate evidenția faptul, că raționamentul din exemplul 2 poate fi verificat și în cadrul logicii aristotelice, ca un polisilogism. Dar acesta este un caz rar, probabil, unul la o sută de mii, când un raționament cu structură logic predicativă complexă este reductibil la o construcție silogistică.

3. Demonstrație și argumentare

Derivarea rezolutivă progresivă din Fig 1 poate fi ușor modificată astfel încât să argumentăm concluzia C după care nici un șef de mafie nu e iubit de toți. Introducem în fig1 "gâtul" fiecărui arbore elementar, conform reprezentării grafice adoptate de noi în teoria argumentării și obținem fig 2 ce descrie un arbore de argumentare. Gâtul" este redat printr-un segment vertical și se citește: "deoarece". Deoarece este relația inversă lui "deci" sau "prin urmare" din actele de deducere. El poate fi privit ca o relație $d \subseteq L \times 2^{L}$, unde L este limbajul logic în care se formalizează teza de argumentat și premisele sau temeiul acesteia. Arborele de argumentare se citește de jos în sus, de la teza de argumentat spre temeiul sau premisele ei. O premisă care servește ca temei poate fi, la rândul ei, și ea argumentată:



6. $-S(v,a) \vee -I(g(v),v)$

Fig. 2. Un arbore de argumentare compus

Dacă vom reveni de la forma clauzală la forma condițională sau implicativă figura 2 devine figura 3 de mai jos, care va fi puțin mai transparentă în privința modului în care se articulează un argument valid într-o situație acțională când un agent emitent emite un argument în favoarea unei teze de argumentat C.
Clauzele ce conțin variabile libere pot fi citite ca enunțuri universale. Ținând seama de convențiile de codificare date la formalizare (vezi pag 4), acum când decodificăm sau "traducem" argumentul din fig 3 în termenii limbii naturale vom citi pentru fiecare argument mai întâi teza şi apoi temeiul ei. Bara verticală, de obicei etichetată cu particula "d" (de la "deoarece") desemnează operatorul de argumentare care leagă teza de apărat de temeiul ei (premisele). Semnul . . simbolizează faptul că premisele scrise la capătul superior al arcelor sunt legate prin conjuncție şi că împreună întemeiază teza scrisă la baza "gâtului". Dacă avem aceiaşi figură fără arcul ce le leagă va însemna că fiecare premisă luată separat va fi un temei suficient pentru teza de la bază. În acest caz vom avea *argumente alternative* pentru una şi aceiaşi aceeaşi teză.

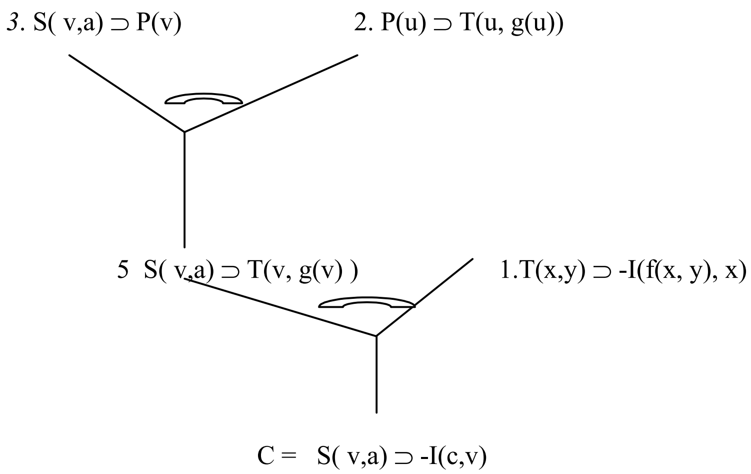


Fig. 3. Un arbore de argumentare compus cu premise sub formă de formule condiționale

Primul argument elementar susține teza C = Pentru fiecare dintre şefii mafiei *a* există cineva care nu-l iubeşte (Toți şefii mafiei a nu sunt iubiți de toți) *deoarece* Fiecare dintre şefii mafiei *a* se teme de cineva (vezi 5) şi Toți cei care se tem de cineva nu sunt iubiți de toți (vezi 1).

Mai departe, premisa 5 din argumentul elementar reprodus mai sus, devine, la rândul ei argumentat. Acest nou argument elementar se citeşte: Toți şefii mafiei *a* se tem de cineva *deoarece* Toți şefii mafiei a sunt păziți (vezi 3) şi Toți ce care sunt păziți se tem de cineva (vezi 2).
Compunerea celor două argumente elementare ne conduce la reprezentarea argumentului compus cercetat.

Un argument este un demers logic aplicat la o situație acțională caracterizată de o bază factuală şi de o bază teoretică (set de clauze generice) ce descrie legi ale naturii, dependențe scop mijloc, norme juridice etc.

Într-un argument valid trebuie ca toate predicatele deschise ce etichetează nodurile terminale din graf ("frunzele") să unifice cu predicate instanțiate din *baza factuală* a argumentului.

Baza teoretică a argumentului este dată de clauzele generice, respectiv de enunțurile condiționale redate mai sus prin propozițiile condiționale inițiale 1, 2 şi 3. Clauzele 5 şi C sunt clauze deduse . C este din punctul de vedere al unui demers argumentativ teza de argumentat iar 1,2 şi 3 sunt clauzele generice terminale admise de participanții la dispută.

Situația acțională sau situația în care are loc demersul argumentativ are ca *model* o listă de atomi instanțiați din baza factuală .

Este util să observăm că arborele din Fig. 3 poate fi în continuare descompus în atomi predicativi potrivit definiţiei implicaţiei $A \supset B \equiv -A \vee B$, astfel încât toate nodurile terminale să fie etichetate cu literali, variabile propoziţionale sau atomi predicativi cu sau fără semnul negaţiei în faţa lor.

Pe de altă parte, arborele din Fig. 3 poate beneficia şi de o altă reetichetare, prin care putem reveni la propoziţii din limba naturală şi să reţinem doar structurile argumentative.

Important de menţionat este faptul că teoria argumentării propusă de noi asimilează dimensiunea pragmatică a discursului, introduce conceptele de situaţie acţională şi model al unei situaţii acţionale, asociază fiecărui participant la disputa argumentativă un ideolect distinct şi o bază de cunoştinţe distinctă şi este legată de demonstraţie automatizată.

Dar să ne întoarcem la ţelul nostru, explicarea axiomei S5.

4. Când şi de ce e necesar un enunţ logic necesar ?

Am văzut în capitolul 2 că idea de necesitate logică este intim legată de relaţia dintre un set de axiome, premise sau ipoteze şi enunţurile derivabile din acestea, cu ajutorul unor reguli de inferenţă. Orice test demonstrativ care întemeiază o teoremă o face şi pe aceasta logic necesară, dacă axiomele de la care am plecat sunt, ele însele, logic necesare sau legi logice. Inferenţele valide conservă şi transferă validitatea de la axiome la teoremele demonstrate. Din axiome valide producem prin derivare teoreme valide.

În mod similar, în cazul datelor unei probleme redate ca o bază de cunoştinţe alcătuită dintr-o mulţime de enunţuri adevărate într-un domeniu de referinţă se conservă prin inferenţă veridicitatea de la datele problemei la soluţiile găsite. Raţionamentele din ipoteze empirice conservă în concluzii veridicitatea acestora.

Suntem tentaţi să credem că oridecâteori demonstrăm într-un sistem axiomatic din axiome valide noi teoreme facem proba că anumite enunţuri necesare sunt în mod necesar necesare. Orice text demonstrativ întemeiază necesitatea formulei terminale, a teoremei demonstrate. Cum însă într-un sistem axiomatic de logica propoziţiilor sau de logica predicatelor noi pornim de la adevăruri logic necesare, demonstraţia teoremelor conduce la întemeierea unor noi adevăruri logic necesare pe validitatea sau necesitatea logică a axiomelor şi pe capacitatea de conservare a validităţii pe care o au schemele de inferenţă.

Sistemele axiomatice mai au o caracteristică. Pe măsură ce demonstrăm noi teoreme sau legi logice, noi construim şi testăm noi scheme de inferenţă, aşa numitele reguli de inferenţă derivate. Acestea devin noi unelte utile în munca noastră de explorare a consecinţelor şi în nevoia de a fundamentare a unor noi teoreme.

Ca să menţinem nivelul de accesibilitate al studiului nostru revenim, în cele ce urmează, din nou, la cele două exemple luate din viaţa cotidiană.

Mai exact, de data aceasta nu ne mai întrebăm ce face Petru, dacă se întâlneşte cu Dan sau cu Ana şi nici dacă dansează sau nu cu aceasta. La fel, nu ne întrebăm în cazul celui de al doilea exemplu, dacă şefii mafiilor sunt sau nu sunt iubiţi de toţi. Toate acestea ţineau de ceea ce în manuale se numeşte limbajul obiect sau limbajul cu valoare descriptivă nemijlocită despre lumea din afară. Trecem de la un limbaj logic cu valoare descriptivă directă despre un domeniu de referinţă, la un limbaj logic mai abstract care are ca obiect formulele bine formate din limbajele logice anterioare (logica propoziţiilor şi logica predicatelor) şi ne întrebăm dacă una sau alta dintre formulele ce descriu exemplele anterioare este demonstrabilă din anumite formule iniţiale sau privilegiate numite axiome cu ajutorul unor "maşinării" formale numite reguli de inferenţă, definiţii sau postulate.

Mai întâi ne vom întreba, dacă putem demonstra în axiomatica logicii propoziţiilor formulele logic necesare ce caracterizează cele două exemple:

F1. $[(p \vee q) \wedge (p \supset (r \wedge s)) \wedge (q \supset (t \wedge v)) \wedge -s] \supset v$ (F1)

şi dacă putem demonstra în axiomatica logicii predicatelor formula :

F2. $[\forall x(\exists y T(x,y) \supset \exists z\text{-}I(z,x)) \wedge \forall u(P(u) \supset \exists t T(u,t)) \wedge \forall v(S(v,a) \supset P(v)) \wedge$
$\wedge \exists w M(w)] \supset \forall s(S(s,a) \supset \exists r\text{-}I(r,s))$ (F2)

Atât formula F1, cât şi formula F2 sunt alcătuite după schema $P^{\#} \supset C^{\#} = T$ care spune că implicaţia dintre conjuncţia formulele provenite din Premise şi Concluzia raţionamentului trebuie să fie o lege logică sau o tautologie.

Cum sistemul axiomatic Hilbert Ackerman este complet şi formula F1 este o formulă validă, F1 este demonstrabilă ca teoremă în sistemul axiomatic Hilbert Ackermann pentru logica propoziţiilor. Pe de altă parte, cum logica predicatelor este semidecidabilă, i.e. orice lege logică din logica predicatelor de ordinul întâi este demonstrabilă ca teoremă în sistemul Hilbert Ackermann pentru logica predicatelor şi formula F2 ce descrie exemplul 2 este o lege logică şi deci, este demonstrabilă în axiomatica logicii predicatelor.

Reamintim definiţiile, axiomele şi regulile de inferenţă propuse de D. Hilbert şi W. Ackermann pentru logica propoziţiilor .

Alfabetul şi regulile de bine formare le considerăm cunoscute de către cititorul nostru.

Definiţii

D1. $p \wedge q := -(-p \vee -q)$

D2. $p \supset q := -p \vee q$

D3. $p \equiv q := (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

Axiome

A1. $(p \vee p) \supset p$

A2. $p \supset (p \vee q)$

A3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

A.4. $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

Axiomele caracterizează proprietăţile disjuncţiei. Prima este o lege de idempotenţă, şi a doua o lege de extindere a disjuncţiei, a treia o lege de comutativitate, iar ultima o lege de expandare a implicaţiei.

Reguli de inferenţă

R.l. Regula substituţiei Daca A este o teorema din limbajul sistemului axiomatic în care apare variabila p şi B este o formula bine formată în acest limbaj, atunci dacă substituim fiecare apariţie a lui p în A prin B obţinem o formula A', de asemenea teoremă. Cu alte cuvinte, substituţia uniformă conservă adevărul. Vom nota substituţia variabilei p prin B prin p/B.

R2. Modus ponens Daca $A \supset B$ este teoremă şi A este teoremă,

atunci şi B este teoremă.

Prescurtat:

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash (A \supset B)\\ \vdash A\end{array}}{\vdash B}$$

R 3. Regula substituirii echivalentelor. Dacă A este o axiomă în care apare subformula B şi $B \equiv C$ este o definiţie sau o teoremă anterior demonstrată, atunci este teoremă formula obţinută din A prin substituirea lui B prin echivalenta sa C.

Demonstrăm ca teorema in sistemul axiomatic H A al logicii propoziţiilor formula F1 generată de exemplul 1. Facem uz pentru aceasta de teorema deducţiei după care, dacă din $\Gamma, A \vdash B$, atunci $\Gamma \vdash A \supset B$. Emitem ipoteza:

1.	1. $(p \vee q) \wedge (p \supset (r \wedge s)) \wedge (q \supset (t \wedge v)) \wedge -s$	ip.
2.	$p \vee q$	E$\wedge$, 1
3.	$p \supset (r \wedge s)$	E$\wedge$, 1
4.	$q \supset (t \wedge v)$	E$\wedge$, 1
5.	$-s$	E$\wedge$, 1
6.	p	ip. supl, 2
7.	$r \wedge s$	MP, 4,7
8.	r	E$\wedge$, 8
9.	s	$\perp$, 10, 6
10.	q	q ip. supl. din 3, căci p = 0, prim Modus Tollens deoarece $r \wedge s = 0$, căci s= 0 pentru că $-s = 1$ conform lui 6.
11.	$t \wedge v$	(MP, 5, 11)
12.	t	E$\wedge$, 12
13.	v	E$\wedge$, 12

14. { $p \vee q$, $p \supset (r \wedge s)$, $q \supset (t \wedge v)$, -s} ├ v
15. ϕ ├ $(p \vee q) \supset (p \supset (r \wedge s)) \supset (q \supset (t \wedge v)) \supset (-s \supset v)))$ (TD , la 15 de 4 ori !)
16. $[(p \vee q) \wedge (p \supset (r \wedge s)) \wedge (q \supset (t \wedge v)) \wedge -s)] \supset v$ (Legea importației aplicată de 4 ori la 16)

Formula 16 coincide cu formula F1 ce descrie raționamentul din exemplul 1. Deci F1 este teoremă în sistemul Hilbert Ackermann.

Să presupunem că am făcut o demonstrație similară și pentru formula F2 care descrie demersul logic din exemplul 2.

Atât F1 cât și F2 sunt de forma:

1. Premisele ⇒* Concluzia, Premisele implică strict Concluzia. P implică strict pe C este tot una cu din P se deduce C.
2. Implicația strictă sintactică presupune un text demonstrativ, un număr finit de pași sau aplicații ale regulilor de inferență prin care se obține din P formula derivată C.
3. Construirea, pornind de la premisele P, a unui text demonstrativ pentru consecința C fundamentează implicația logică dintre P și C.
4. Implicația strictă este inversa relației de consecință logică. Dacă P⇒* C, atunci C este o consecință logică din P. Dar consecința logică se scrie, în privința ordinii termenilor, tot ca implicația strictă, căci scriem că din P se deduce C, i.e. P ├ C, tot cu P înainte și C după.
5. Implicație logică P⇒*C (consecința logică generică sau iterată de un număr finit de ori) este numită de C.I. Lewis implicație strictă și ea este echivalentă cu $L(P \supset C)$ care este o implicație materială necesară. Implicația logică afirmă că este logic imposibil să fie adevărat, P fără să fie adevărat și C i.e. –M(P∧-C).
6. După noi implicația strictă presupune, deopotrivă, consecință logică sintactică desemnată în mod curent prin ├ și consecința logică semantică redată prin ⊨.
7. Orice implicație logică descrie o formulă validă sau o tautologie și poate fi rescrisă pe baza definiției lui C.I. Lewis ca o formulă logică modală. La același rezultat se poate ajunge prin aplicarea regulii necesitării la unele legi logice din logica propozițiilor sau din logica predicatelor.
8. Implicația strictă sau implicația logică conservă adevărul de la premise la consecințe: {├ P⇒*C, ├P } ⇒* ├ C
9. Orice inferență validă poate fi transformată intr-o formulă logic modală prin aplicarea regulii necesitării sau prin acceptarea definiției lui C.I. Lewis și utilizarea regulii substituirii echivalentelor. Formulele valide descriu adevăruri logic necesare.
10. Implicația strictă implică implicația materială :
(P⇒*C) ⊃ (P ⊃ C)

Demonstrație prin reducere la absurd.

1. P⇒*C ip.
2. -(P ⊃ C) ip. dem. ind.
3. P ∧ - C RE, LP, 2
4. P E∧, 3
5. –C E∧, 3
6. C 1, 7
7. Contr: 8, 9

Cum P⇒*C ≡L(P⊃C), rezultă din teorema de mai sus prin RE că :

L(P⊃C) ⊃(P⊃C)

ceea ce nu este decât un este un caz particular al axiomei specifice lui T Lp ⊃p

Dacă substituim în axioma lui T , Lp ⊃p variabil p printr-o implicație strictă ce descrie o consecință logică sintactică într-o teorie oarecare de forma P⇒*C obținem

L(P⇒*C) ⊃ (P⇒*C) Dacă este logic necesară o derivare logică atunci este adevărată i.e. are loc acea derivare logică.

Să mai punem axioma T să ducă în spinare teorema deducției..Dar mai întâi să umblăm pe la modalitățile latente ascunse în teorema deducției. Teorema deducției spune că dacă din Γ, A ├ B, atunci Γ├ A ⊃ B. Să o pregătim puțin pentru întâlnirea cu axioma lui T. Să-i facem puțin toaleta astfel încât să fie în ton cu logica modală. Atât antecedentul cât și consecventul conțin necesități logice ascunse sub chipul de consecințe logice. Antecedentul poate fi reformulat ca $L((\Gamma\wedge A) \supset B)$ iar consecventul ca $\supset L(\Gamma\supset(A \supset B))$. Legătura dintre ele o exprimăm ca în limba naturală printr-o propoziție condițională şi scriem simplu:

1. $L((\Gamma\wedge A) \supset B) \supset L(\Gamma\supset(A \supset B))$.

Dar ne întrebăm dacă acesta-i înțelesul real al enunțului. Şi constatăm că nu acesta este sensul, deoarece antecedentul a fost legat de consecvent printr-un text demonstrativ construit prima dată de un logician francez Herbrand, mort tânăr în timpul primului război mondial. Putem, deci, în spiritul definiției lui Clarence Irving Lewis sau în spiritul regulii necesitării formulate de Kurt Godel să resciem 1 ca 2.

2. $L(L((\Gamma\wedge A) \supset B) \supset L(\Gamma\supset(A \supset B)))$.

Formula 2 este expresia modală a teoremei deducției. Mai rămâne să-I verificcăm print-un procedeu de decuzie validitatea, să cercetăm cărui sistem modal normal aparține.

Substituim acum în axioma specifică lui T, $Lp \supset p$, pe p prin formula 2 de mai sus şi obținem:

3. $L\ L(L((\Gamma\wedge A) \supset B) \supset L(\Gamma\supset(A \supset B))) \supset L(L((\Gamma\wedge A) \supset B) \supset L(\Gamma\supset(A \supset B)))$.

Şi această făptură trebuie cercetată.

Deocamdată obiectivul nostru este descoperirea tâlcului mai profund al axiomei specifice sistemului S4. Ne întoarcem deci la înțelegerea necesității unei necesități.

Demonstrație

$LF \supset LLF$

1. LF ip
2. Fie F o formulă dintr-un limbaj **L** (logica propozițiilor sau logica predicatelor) ce descrie o relație de consecință logică de forma: $P\Rightarrow^*C$, cum am avut anterior cazurile F1 şi F2 pentru exemplul 1 şi respectiv pentru exemplul 2
3. Întrucât F este o formulă validă în într-o teorie ce face uz de limbajul **L** sau o tautologie, lui F i se poate aplica regula necesitării.
4. Obținem astfel formula logic modală: LF. De fapt LF are o structură de forma: $L(P\supset C)$.
5. Admitem că teoria logică descrisă în limbajul **L** are ca axiome pe A1, A2, A3 şi A4 şi ca reguli de inferență pe R1, R2 şi R3
6. Întrucât axiomele A1 –A4 sunt tautologii sau formule identic adevărate, le putem aplica şi lor regula necesitării, N. Obținem: LA1, LA2, LA3 şi LA4.
7. Aplicând regula introducerii conjuncției $I\wedge$ obținem : $LA1\wedge LA2\wedge LA3 \wedge LA4$.
Considerăm un sistem modal cel puțin de tăria de tăria lui T ce conține axiomele:
8. (K) $L(p\supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ şi (T) $Lp\supset p$ şi regula necesitării: N. În sistemul T este demonstrabilă teorema K3 $L(p\wedge q) \equiv (Lp\wedge Lq)$ (vezi lucrarea noastră *Logică şi metalogică* , Editura Fundației "România de mâine" 2002, vol 2, cap 6, p 278) Pe baza lui K3 obținem: $L(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4)$
9. Din $L(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4)$, care este echivalentă cu $LA1\wedge LA2\wedge LA3 \wedge LA4$ a rezultat în axiomatica hilbertiană LF1 şi LF2 . Demonstrația făcută în sistemul hilbertian s-a făcut la nivelul legilor logice şi deci ale unor formule valide. Ceea ce se conservă prin textul demonstrativ este validitatea. Nişte formule logic necesare implică logic necesar alte formule logic necesare. Avem nişte structuri de forma:
10. $L(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4) \Rightarrow^* L(P1\supset C1)$
11. Potrivit definiției lui C.I.Lewis a implicației stricte sau a ideii de consecință logică şi regulii substituirii echivalentelor din 9 obținem:
12. $L(L(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4) \supset L(P1\supset C1))$.
13. Operând o substituție în axioma sistemului (K) $L(p\supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ astfel încât antecedentul ei să devină formula 10 obținem:
14. $L(L(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4) \supset L(P1\supset C1)) \supset (LL(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4) \supset LL(P1\supset C1))$
15. $(LL(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4) \supset LL(P1 \supset C1))$ (MP, 14,12)
16. $(LL(A1\wedge A2\wedge A3 \wedge A4)$ (N, 9)
17. $LL(P1 \supset C1))$ (MP, 12, 13)
18. LLF (Convenție de prescurtare: $F \div(P1 \supset C1)$!)

Concluzii

1. Axioma specifică a sistemului S4 Lp ⊃ LLp ne spune că un *enunț logic necesar* care descrie o lege logică, (să spunem, de exemplu, enunțul F1 ce descrie raționamentul din exemplul 1 pe baza căruia am dedus dintr-un set de premise P concluzia v după care Dan dansează cu Ana) poate fi, la rândul lui, fundamentat, la alt nivel, cel al teoriei sistemelor axiomatice, ca *fiind logic necesar* pe temeiul că el derivă din axiome sau formule valide prin scheme valide de inferență. Logica este un edificiu cu mai multe nivele. Ea operează la nivelul limbii naturale, să spunem, la parter. Dar mai operează şi la nivelul primului etaj, respectiv, la nivelul teoriilor logice primare, cum ar fi silogistica, logica propozițiilor, logica predicatelor de ordinul întâi. Dar mai operează şi la etajul al doilea, la nivelul teoriei sistemelor axiomatice, unde construim o teorie logică despre legile logice. Prelucrăm legile logicii cu metodele logicii. Şi de aici ne urcăm la nivel metateoretic, la etajul trei când dezvoltăm teorii despre proprietățile altor teorii logice.
2. Schemele şi regulile logice, deducția şi demonstrația pot opera la oricare dintre aceste nivele, la nivelul limbilor naturale şi a gândirii logice spontane a oamenilor despre obiectele, faptele şi evenimentele lumii reale. Oridecâteori rezolvăm o problemă folosim conştient sau spontan reguli şi scheme de inferență care conservă *veridicitate* premiselor în consecințele degajate din acestea. Primul exemplu aparține acestei categorii. Cel de al doilea, deşi puțin mai reflexiv, nu e departe de primul. Demonstrarea in capitolul 2 (vezi pag 2) că formula ce descrie raționamentul din exemplul 1 este o *formulă validă* este realizată în limbajul logicii propozițiilor. Am folosit pentru aceasta o demonstrație directă ce ține de calculul natural . Am mai făcut uz de o metateoremă numită teorema deducției, TD, care permite scurtarea textului demonstrativ.
3. Demonstrarea concluziei celui de al doilea exemplu se întemeiază pe metoda rezoluției o metodă modernă care subsumează schemele de inferență modus ponens, modus tollens, tranzitivitatea, principiul alternativei şi altele într-o schemă mai abstractă numită principiul rezoluției (vezi teorema rezolventului, teorema derivării rezolutive, strategiile rezolutive). Acestea sunt principii şi tehnici de prelucrare a bazelor de cunoştințe folosite în sistemele expert şi în cele de inteligență artificială. Cititorul se poate iniția în aceste metode şi în altele similare folosind literatura națională şi internațională de logică, inclusiv manualele publicate de noi în ultimii 10 ani. *Logica predicatelor*, Hyperion, 1992, *Logica simbolică şi bazele de cunoştințe*. vol1 , vol 2, Universitatea "Politehnica" Bucureşti 1998, reeditat şi in acelaşi an, şi *Logică şi metalogică*, vol 1, Editura Fundației "România de mâine", 2000 şi vol 2 tipărit în 2002.
4. Un procedeu de decizie întemeiază o judecată de valoare asupra unor clase de formule logice, se pronunță asupra validității sau invalidității unor mulțimi de formule, asupra realizabilității sau irealizabilității acestora. Fiind dovedită o formulă ca validă sau tautologică putem aplica asupra ei definiția lui C.I. Lewis sau regula necesitării şi să o transformăm într-o formulă de logică modală aletică despre operațiile de derivare logică
5. Demonstrația dată în capitolul 2 la pagina 5 despre cel de al doilea exemplu are loc la nivelul limbajului obiect al logicii predicatelor de ordinul întâi limbajul logic de bază. Suntem tot la etajul întâi, la nivelul logicii moderne de bază . Nu silogistica este logica de bază.
6. In capitolul al treilea am făcut o conexiune neaşteptată de cititor între demonstrația întemeiată pe metoda rezoluției şi teoria argumentării. Demonstrația şi argumentarea sunt procese logice înrudite şi interconectate, dar şi profund deosebite. Argumentarea este în viziunea noastră logică aplicată la o situație acțională şi este inevitabil o teorie logică pragmatică în care intervin agenți, situații acționale dotate cu modele, scopuri, conduite şi evaluări de scopuri şi programe, judecăți de valoare.
7. Demonstrația dată în capitolul 4 formulei ce descrie exemplul 1 este desfăşurată într-un sistem axiomatic al logicii propozițiilor creat de David Hilbert şi Wilhelm Ackermann. Sunt enunțuri selectate şi aparțin axiomatice doar enunțurile care pot fi demonstrate ca teoreme în sistem Dar noi am folosit strategii lesnicioase de demonstrare folosind metateoria deducției, făcând demonstrația mai scurtă şi mai legată de gândirea naturală.
8. Acțiunea are loc la al treilea nivel (la etajul al doilea). Aici demonstrația se întemeiază pe axiomele şi regulile de inferență ale sistemului şi din nou pe metateorema deducției. Schemele de inferență conservă la acest nivel validitatea, nu doar veridicitatea. Aici am demonstrat că formula adeverită în capitolul al doilea la nivelul limbajului obiect ca tautologie şi deci logic necesară [(p

$\vee$ q) $\wedge$(p $\supset$ (r$\wedge$s)) $\wedge$ (q $\supset$ (t$\wedge$v)) $\wedge$ -s] $\supset$ v derivă cu necesitate din axiomele sistemului Hilbert Ackerman şi deci este necesar să fie necesară. Ori tocmai aceasta pretinde axioma S4 formula Lp $\supset$ LLp. Este util să reamintim că în interpretarea dată de noi variabila propoziţională p din axioma specifică lui S4 nu stă pentru propoziţii empirice de genul "Dan este student", ci pentru expresii propoziţionale ce conţin implicaţia strictă redată de noi prin expresii de forma P$\Rightarrow$*C care descriu relaţia de consecinţă logică, pentru relaţii de genul "Din faptul că Dan este student conchidem că este bacalaureat"

9. Prin mijlocirea definiţiilor lui C.I. Lewis (vezi (δ) şi (γ) în capitolul 2) şi prin intermediul regulii necesitării $\vdash\alpha \;\Rightarrow\; \vdash L\alpha$ (dacă α este o lege logică atunci α este logic necesară se leagă logica matematică clasică , logica propoziţiilor şi logica predicatelor de logica modală ca teorie a necesităţii logice, a posibilului, contingentului şi imposibilului.
10. Demonstraţia dată la sfârşitul capitolului 4 axiomei specifice sistemului S4 este una internivelară, fiind localizată, în cele din urmă, la nivel modal.
11. Spiritul meu cartezian s-a domolit. Mă mai stânjeneşte stilistic descrierea în limba naturală a axiomei specifice lui S4. Dar sunt pe deplin convins că ea are semnificaţii profunde în teoria consecinţelor logice şi că ea dă seama, între altele, de trecerea de la un nivel al unei teorii logice la altul superior acestuia, în speţă de trecerea de la logică, la metalogică.
12. Agentul discursiv, fiinţa umană operează în rezolvarea unei probleme la mai multe nivele, trece adesea de la un nivel la altul şi de la un limbaj la altul, codifică şi decodifică, trage consecinţe şi caută antecedenţi, premise sau "strămoşi", procedează analitic şi reductiv, descompune datele la structuri atomare şi apoi le reasamblează în alte configuraţii. Logica nu este numai deducţie, ci şi proces de analiză conceptuală reducţie şi abducţie. Logica este şi argumentare sau întemeiere. În orice proces de comunicare logica este şi o ciocnire de idiolecte un efort de definire şi reajustare a sensurilor termenilor prin definiţii stipulative explicite şi un efort de a atrage pe interlocutorii noştri de partea punctelor de vedere apărate de noi. Dar tot logica pregăteşte vaccinul adecvat împotriva sofismelor şi paralogismelor ce mişună libere în viaţa publică românească.
13. O interpretare ce a făcut carieră a axiomei lui S4 este cea iniţiată de Jakko Hintikka în sistemele sale de logică epistemică: $K_x p \supset K_x K_x p$. Dacă agentul x ştie că p, atunci el ştie că ştie p. Care este semnificaţia mai profundă a acestei teoreme. Ca un amuzament, anexăm un comentariu poetic asupra interpretării epistemice a axiomei sistemului S4 .

Bibliografie

1. Gabbay,D. Kurucz, Wolter,F.,Zakharyaschev*, Many Dimensional Modal Logic. Theory and Applications* Internet http://www.dcs.kcl.ac.uk/staff/mz/GKWZ/gkwz.html
2. Hintikka, J.K.K., *Knowledge and Belief*, Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1962.
3. Hughes, G.E.Cressewell, . M.J An Introduction to Modal Logic, Metuen and Co lTD, London
4. Hughes, G.E. Cressewell, M.J.a New Introduction to Modal Logic, Routledge, London and New York
5. Lewis, Clarence Irving *Survey of Symbolic Logic, 1918*
6. Lewis C.I., G.H. Langford, Symbolic Logic, Dover Publications, Second edition,1959.1932
7. Popa , Cornel. Conceptele logicii modale la G.W. Leibniz şi sistemul implicaţiei stricte, *Revista de filosofie* nr. 12, 1966, p. 1449-1454.
8. Popa, Cornel, *Logică şi metalogică*, vol 1, Editura Fundaţiei "România de Mâine" Bucureşti 2000 384 pp
9. Popa, Cornel, *Logică şi metalogică*, vol 2. Editura Fundaţiei "România de Mâine" Bucureşti 2002, 518 p

Anexa I Logica epistemică

Profesorului Jakko Hintikka

Cel ce ştie, află că ştie,
îşi pângăreşte duhul cu trufie
şi încetează de a fi smerit.
E un creştin cu duhul otrăvit.

Dă-mi, Doamne, ştiinţa pură,
de început,
a lucrului întâi făcut,
fără de trudă şi suspin,
mesianic şi cu gând senin.
Ajută-mă să aflu şi să ştiu,
fără să ştiu că ştiu.

Suspendă Doamne, axioma S4.

Ajută-mă să-nvăţ în somn,
conectează-mă, Doamne,
la Internetul ceresc,
destăinuie-mi parola fișierelor tale
şi lasă-mă, liber, să plutesc,
în împărăţia cunoaşterii,
ca un duh peste ape,
de tine aproape,
căci Tu eşti agentul omniscient,
şi omnipotent.
Baza Ta de date e nelimitată,
Tu nu oboseşti, între premise
şi concluzii, niciodată.
Tu treci, dintr-o zvâcnire
şi instantaneu
priponul unde gâfâi eu.
Tu, Doamne, le ştii pe toate,
căci ai fişierele nevirusate.

Pe bune,
fă, Doamne această minune.
şi mă voi duce la utrenie
şi la vecernie;
mă voi hrăni cu prescură
şi cu smerenie.

Cel ce ştie, află că ştie.
O sursă de orgoliu şi trufie
şi de cerească, sfântă bucurie.

Anexa II. Adnotări la Logica epistemică

Am ascultat, din întâmplare, la radio o predică despre *Vameşul şi fariseul* la sfârşitul lui Februarie 2002.(vezi Evanghelia după Luca, 18, 10-14)
Axioma specifică lui S4 $Lp \supset LLp$
Interpretarea ei epistemică: $K_x p \supset K_x K_x p$
Demersul logic din poezie:

1. $K_x p$ ip.
2. $K_x p \supset K_x K_x p$
3. trufas(x)

4. trufas(x) ⊃ -smeritY(x)
5. -smerit(x) ⊃ -bun_crestin(x)
6. --bun_crestin(x) (MP, tranzitivitate 1-5)

Alternativa:

7. K_xK_xp ⊃ bucurie_cerească.